

12.3. **Il problema di Dirichlet nel piano.** In questa lezione si vuole dare risoluzione completa e rigorosa del problema di Dirichlet nel piano:

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ u = g & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{array}$$

12.3.1. **Distribuzione di temperatura in una piastra e teorema di Gauss della media.** Consideriamo un flusso costante di calore in una piastra metallica le cui facce sono isolate. Nell'interno della piastra $T(z)$ è una funzione armonica, $\Delta T = 0$, e il flusso di calore è il campo vettoriale ∇T . Misuriamo la temperatura lungo la circonferenza C di un cerchio di raggio $R = 1$ (non c'è restrizione, basta cambiare scala di lunghezza), l'interno del quale è privo di sorgenti e pozzi, e il cui centro possiamo scegliere convenientemente come l'origine. Quando $Z = e^{i\theta}$ si muove lungo C , possiamo esprimere la temperatura come funzione dell'angolo,

$$T = T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} T(e^{i\theta})$$

È fisicamente plausibile che questi valori determino la temperatura in qualunque punto interno z . Sappiamo già che le cose stanno così per il centro del cerchio: il teorema della media di Gauss afferma che

$$T(0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta$$

e anche se non avessimo saputo nulla del teorema della media, da fisici, questa è la formula che avremmo scritto immediatamente per la temperatura nel centro. Che altro se non questo?

Scopo di questa lezione è mostrare che la chiave di volta per risolvere il problema di Dirichlet nel piano è il teorema della media di Gauss. Essendo questo un risultato profondo di matematica, vogliamo arrivarci per gradi, chiarendo tutti i passi che si devono compiere, cercando di fare apprezzare così la bellezza del risultato che si ottiene. Per il momento abbiamo impostato il problema per il disco unitario \mathbb{D} con condizioni al contorno sul suo bordo \mathbb{T}

12.3.2. **Risoluzione del problema per trasformazione conforme.** Se esistesse una trasformazione conforme $z^* = h(z)$ del disco \mathbb{D} in sè stesso che scambiasse il punto z con l'origine, allora $T(z^*)$ sarebbe armonica perché una trasformazione conforme preserva l'armonicità. Inoltre, il problema sarebbe immediatamente risolto: la temperatura nel punto $z = a$ sarebbe ottenuta con il teorema della media di Gauss per la distribuzione sul bordo trasformata. Avremmo cioè

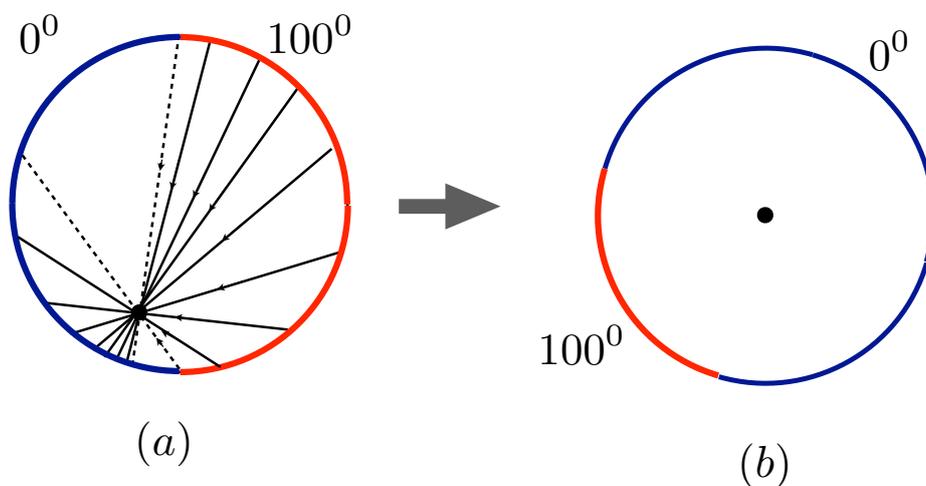
$$(1) \quad T(a) = T(0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta,$$

una formula che interpretiamo così: la temperatura in 0 nel piano z^* è la media della nuova distribuzione di temperatura su C ottenuta trasportando la temperatura in ogni punto Z di C nel nuovo punto Z^* di C .

Ma a trasformazione cercata esiste e l'abbiamo appena studiata nella lezione 12.1! È la trasformazione “swap” che scambia un punto qualunque nel cerchio con il centro del cerchio:

$$h(z) = z^* = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1}, \quad |a| < 1$$

12.3.3. *Ciò che è naturale per la matematica lo è anche per la fisica.* Verifichiamo che la soluzione matematica naturale è anche la soluzione fisica naturale (che avremmo potuto trovare indipendentemente dalla matematica). È fisicamente intuitivo che la temperatura in un punto z sia una media pesata dei valori sul bordo: se il punto z è al centro, i punti sul bordo pesano tutti allo stesso modo, se z non è nel centro occorre pesare diversamente i punti più vicini da quelli più lontani. Ma in che modo? Con un po' di ingegnosità, si arriva alla trasformazione “swap”, nella sua forma geometrica dell'esercizio 1 della lezione precedente. Consideriamo l'esempio considerato da Needham¹: la metà sinistra è del bordo del cerchio è a 0° e quella di destra a 100°



Con la costruzione geometrica dell'esercizio 1 il contributo della parte lontana risulta correttamente ricalibrato: per trovare la temperatura in $z = a$ si trasporti ciascuna temperatura su \mathbb{T} nel punto direttamente opposto come visto da $z = a$, quindi si prenda la media della nuova distribuzione di temperatura così ottenuta.

¹Needham fa ben di più: usa la caratterizzazione geometrica per arrivare alla trasformazione swap.

12.3.4. **Formula risolutiva per il disco unitario.** Calcoliamo il secondo membro di (1). Per cambiamento di variabili si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) \frac{d\theta^*}{d\theta} d\theta$$

Ma, per l'esercizio 2 (con z anziché a),

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}.$$

Allora

$$(2) \quad T(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} T(\theta) d\theta.$$

12.3.5. **Il nucleo integrale di Poisson.** La soluzione dell'equazione di Laplace risulta così espressa in termini del nucleo integrale

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

che è chiamato *nucleo di Poisson*. È utile conoscere le sue proprietà e comprendere meglio la formula (2).

Incominceremo col riscrivere la formula (2) così

$$(3) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} g(e^{i\theta}) d\theta.$$

Il cambiamento è sia cosmetico sia cautelativo: *cosmetico*, perché abbiamo cambiato nome alla funzione: u ci ricorda meglio che alle spalle abbiamo una funzione analitica $f = u + iv$, di cui, appunto, u è la parte reale; *cautelativo*, perché abbiamo chiamato g la condizione al contorno che vorremmo assegnare, più o meno, arbitrariamente. Che sul cerchio u e g coincidano, non può essere assunto, ma *deve essere dimostrato*. E la dimostrazione ci dirà quali condizioni g deve soddisfare.

Procediamo per punti.

P 1. *Il nucleo di Poisson è la parte reale di una funzione analitica. Più precisamente, per $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ ($r < 1$) e $Z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ si ha*

$$(4) \quad \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right).$$

Dim.

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(e^{i\theta} + z)(e^{-i\theta} - \bar{z})}{|e^{i\theta} - z|^2} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

P 2. La soluzione $u = u(z)$ può essere espressa come un prodotto di convoluzione tra il nucleo di Poisson e la funzione sul bordo. In altre parole, la formula (3) può essere riscritta come

$$(5) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(e^{i\theta}) d\theta \equiv P_r * g(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}.$$

dove

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2}.$$

Dim. Segue immediatamente dalla (4).

P 3. La funzione

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta$$

è una funzione analitica in \mathbb{D} per qualunque funzione integrabile reale g su \mathbb{T} .

Dim. Segue da Cauchy-Riemann. L'equazione (6) è detta formula di Schwartz e permette di ricostruire la funzione analitica completa $f(z)$ nel disco \mathbb{D} a partire dalla sua parte reale su \mathbb{T} .

P 4. La funzione $u(z) = P_r * g(t)$ è una funzione armonica di $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ per qualunque funzione integrabile g su \mathbb{T} .

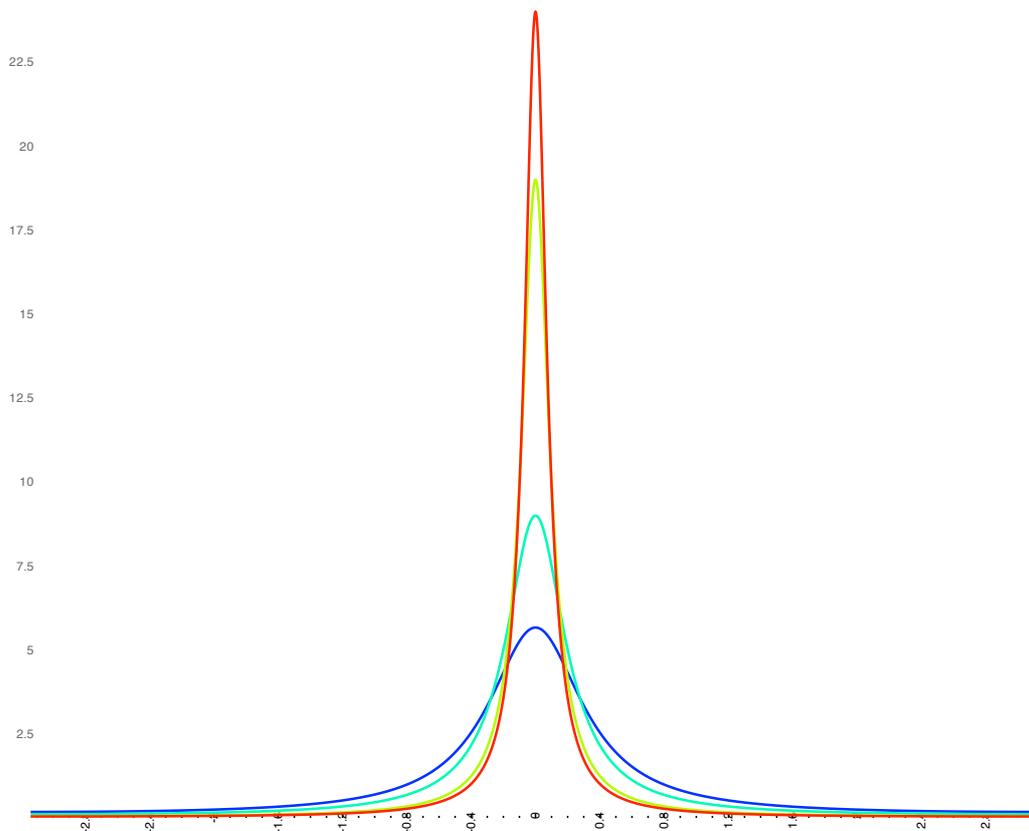
Dim. Segue dal fatto che la parte reale di una funzione analitica è armonica e $u(z)$ è in effetti la parte reale della funzione $f(z)$ del punto 3:

$$\begin{aligned} P_r * g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Il prossimo punto merita un capitolo a parte.

12.3.6. Il nucleo di Poisson come successione regolare approssimante la delta. In figura sono riportati i grafici del nucleo di Poisson per $r =$

0.7, 0.8, 0.9, 0.92 in $-\pi \leq \phi < \pi$.



Sembra una successione di approssimazioni della delta di Dirac e, in effetti, lo è. Ma è la delta su \mathbb{T} e non su \mathbb{R} . Data una successione r_n tendente a 1, la corrispondente successione di nuclei integrali di Poisson

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2}.$$

è una successione regolare di buone funzioni, nel modo in cui possono essere buone le funzioni su \mathbb{T} : ovviamente non può esserci decrescenza all'infinito, visto che \mathbb{T} è compatto. Se prolungassimo ϕ a destra e a sinistra i grafici si ripeterebbero periodicamente.

Le proprietà che rendono la successione $\frac{1}{2\pi}P_r$, $r \rightarrow 1$, una successione di approssimanti della delta su \mathbb{T} sono le seguenti:

- (1) $P_r(\phi) > 0$ per tutti gli $z = re^{i\phi} \in \mathbb{D}$ (cioè per $r < 1$ e $-\pi \leq \phi < \pi$).
- (2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\phi) d\phi = 1$
- (3) Il massimo di $P_r(\phi)$ fuori da qualunque intorno $(-\delta, \delta)$ di $\phi = 0$, non importa quanto sia piccolo, tende a 0 per r che tende a 1.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: (1) è ovvio; (2) è lasciato come esercizio (facile); (3) segue dall'osservazione che $1 + r^2 > 2r$ (perché $(1 - r)^2 > 0$), da cui

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\phi))}.$$

che tende a 0 per $r \uparrow 1$ in tutti i punti per cui $\cos \phi \neq 1$.

12.3.7. Teorema principale di convergenza uniforme. Vogliamo adesso dimostrare che se g è una funzione continua su \mathbb{T} , la funzione

$$u(z) = u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}$$

converge *uniformemente* a g quando r tende a 1 (per semplicità di notazione abbiamo scritto $g(s)$ invece di $g(e^{is})$).

Dim. Stimiamo l'errore tra il limite e la funzione u :

$$E_r(t) = |g(t) - u(r, t)| = \left| g(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta \right|$$

Per cambiamento di variabili $t - \theta = s$, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) g(t - s) ds$$

Allora

$$E_r(t) = \left| g(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) g(t - s) ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) [g(t) - g(t - s)] ds \right|,$$

essendo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = 1$. Poiché il modulo dell'integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo (e $P_r(s)$ è positiva), otteniamo

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds.$$

I problemi nascono da $s = 0$, dove $P_r(s)$ diverge. Separiamo allora l'integrazione in due parti, una su un piccolo intorno dello 0 e l'altra sul resto:

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds.$$

La funzione g è continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi limitata da una costante M . Per $|s| > \delta$ il massimo di $P_r(s)$ è maggiorato da $\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$ che tende a zero per r che tende a 1. Quindi

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds + 2M \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\delta))}.$$

La funzione g è continua su \mathbb{T} , ma poichè \mathbb{T} è compatto (=chiuso e limitato) per il *Teorema di Heine-Cantor* è anche uniformemente continua. Si fissi allora un ϵ

arbitrario, dalla continuità uniforme segue che esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti i t e s con $|s| < 1$ si ha $|g(t) - g(t - s)| < \epsilon/2$. Quindi, per ogni ϵ esiste un δ tale che

$$E_r(t) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\delta))}.$$

Si prenda r così vicino a 1 che il secondo termine sia minore di $\epsilon/2$. Allora

$$E_r(t) \leq \epsilon$$

Che è quando si voleva dimostrare: l'errore tende a zero uniformemente in t , cioè la funzione $u(z)$, armonica nel disco \mathbb{D} converge *uniformemente* al suo valore assegnato g sulla frontiera \mathbb{T} quando z tende a un punto della frontiera.

In questo modo risulta stabilita l'esistenza di soluzioni del problema di Dirichlet nel disco con condizioni continue al bordo. L'unicità è stata stabilita nella lezione 12.2.4. Fine (per il disco).

12.3.8. Il problema generale. Per il teorema delle rappresentazioni di Riemann, risolto il disco, il problema è risolto (esistenza e unicità della soluzione) per qualunque regione la cui frontiera è una curva semplice chiusa.