

## 21.2. Trasformata di Laplace.

Anche in questa lezione, come nella precedente, lavoriamo con la convenzione ② per la trasformata di Fourier (a segni invertiti):

$$(1) \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$$

$$(2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

### 21.2.1. *Trasformata di Laplace = trasformata di Fourier di funzioni nulle nel passato.*

La trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$  “nulla nel passato” (cioè diversa da zero solo per  $t \geq 0$ ) non è altro che la continuazione analitica al piano delle frequenze complesse  $z = \omega + i\sigma$  della trasformata di Fourier di  $f(t)$ . Dunque, per quanto visto nella lezione 20.1.3, la trasformata di Laplace risulta definita come la continuazione analitica di:

$$(3) \quad \widehat{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt, \quad \text{Im}(z) = \sigma > 0$$

Per la proposizione 1 della lezione 20.1.3, sappiamo che  $\widehat{f}(z)$  è analitica nel semipiano superiore se  $f(t) \in L^2(0, \infty)$ , per cui, sotto questa condizione, le singolarità di  $\widehat{f}(z)$  saranno tutte nel semipiano inferiore  $\Pi^-$ .

Possiamo tuttavia essere più liberali riguardo al range della trasformata. Una crescita polinomiale del tipo  $t^n$ , purché sia  $\sigma > 0$ , non modifica la convergenza dell'integrale (3). Il massimo che possiamo permettere è questo: supponiamo che  $f(t)$  sia esponenziale di ordine  $\gamma$ , cioè

$$|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$$

Allora

$$\widehat{f}(z) = \widehat{f}(\omega + i\sigma) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt$$

è convergente per  $\sigma > \gamma$  e dunque  $\widehat{f}(z)$  è analitica nel semipiano  $\sigma > \gamma$ .

Quando si definisce una trasformata, la prima cosa che occorre fare è garantire che abbia un'inversa e che sia unica. Dalla (3), vediamo che la trasformata di Laplace nel punto  $z = \omega + i\sigma$  è la trasformata di Fourier della funzione

$$f_{\sigma}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

e quindi che

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + i\sigma)e^{-i\omega t} d\omega .$$

Allora

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + i\sigma) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + i\sigma) e^{-i(\omega + i\sigma)t} d\omega \end{aligned}$$

In definitiva, la formula di inversione della trasformata di Laplace è

$$(4) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L \widehat{f}(z) e^{-izt} dz,$$

dove  $L$  è qualunque linea nel semi-piano superiore  $\Pi^+$ , parallela all'asse reale, e tale che le singolarità di  $\widehat{f}(z)$  sono sotto  $\gamma$ . L'integrale di cammino (4) lo si calcola secondo le regole usuali, ad esempio, deformando  $L$  in modo opportuno nel piano complesso e usando il metodo dei residui (sotto daremo una ricetta standard).

**Esempio 1.** *Come esempio, consideriamo  $f(t) = t$ . Allora*

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \int_0^{\infty} t e^{itz} dt, \quad \text{Im}(z) > 0 \\ &= t \frac{1}{iz} e^{itz} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{iz} e^{itz} dt \\ &= 0 - \frac{1}{iz} \left[ \frac{1}{iz} e^{itz} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

*Verifichiamo la formula di inversione e calcoliamo*

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz$$

*Chiudiamo  $L$  su un cammino di raggio  $R$  nel semipiano inferiore. Allora, poiché chiudiamo in senso orario,*

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -2\pi i \sum \text{Res}$$

*Abbiamo un polo doppio per  $z = 0$ . Quindi*

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -i \frac{d}{dz} z^2 \frac{-1}{z^2} e^{-izt} \Big|_{z=0} = -i(-1)(-it) = t$$

La trasformata di Laplace, essendo la continuazione analitica di una trasformata di Fourier, condivide molte delle proprietà della trasformata di Fourier, ma ci sono anche delle differenze che è importante mettere in evidenza. Queste differenze nascono dal fatto che la funzione  $f(t)$  vista come funzione su  $\mathbb{R}$  è nulla per  $t <$

0. Una conseguenza immediata di questo fatto riguarda come si trasformano le derivate.

Consideriamo la trasformata di  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(z) &= \int_0^\infty f'(t)e^{itz} dt \\ &= f(t)e^{itz}\Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)(iz)e^{itz} dt \\ &= -f(0) - iz\widehat{f}(z)\end{aligned}$$

E in maniera analoga si mostra che

$$\widehat{f}''(z) = -z^2\widehat{f}(z) + izf(0) - f'(0)$$

Queste caratteristiche rendono la trasformata di Laplace uno strumento molto utile per risolvere problemi al contorno con condizioni iniziali. Vediamone degli esempi.

**Esempio 2** (particella in un fluido). *Equazione per la velocità ( $m = 1$ )*

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = 0$$

Quindi

$$-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = 0$$

da cui

$$\widehat{v}(z) = \frac{i}{z + i\gamma}v_0$$

Come ci aspettavamo, la singolarità è nel semipiano inferiore. Nel semipiano superiore la funzione è analitica. Invertiamo

$$v(t) = e^{-\gamma t}v_0$$

**Esempio 3** (equazione del calore). *L'equazione è arcinota*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Sia  $\widehat{f}(k, z)$ , la trasformata di Fourier usuale rispetto allo spazio e la trasformata di Laplace rispetto al tempo (= Fourier con opposta convenzione sul segno) della funzione  $f(x, t)$ , che assumiamo nulla per  $t < 0$ . Allora

$$-iz\widehat{f}(k, z) + f_0(k) = -k^2 D \widehat{f}(k, z)$$

da cui

$$\widehat{f}(k, z) = \frac{i}{z + iDk^2}f_0(k)$$

Un'altra proprietà che la trasformata di Laplace eredita è il prodotto di convoluzione. Anche in questo caso c'è una differenza che nasce dal fatto che le funzioni di cui si considera la trasformata di Laplace sono nulle per  $t < 0$ . Questo significa che al prodotto di due trasformate

$$\widehat{f}(z)\widehat{g}(z)$$

corrisponde il prodotto di convoluzione

$$f \star g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = g \star f(t)$$

**Esempio 4** (particella in un fluido sotto l'azione di una forza dipendente dal tempo). *Equazione per la velocità* ( $m = 1$ )

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = f(t)$$

Quindi

$$-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = \widehat{f}(z)$$

da cui

$$\widehat{v}(z) = \frac{i}{z+i\gamma}v_0 + \frac{i}{z+i\gamma}\widehat{f}(z)$$

Dalla (4) segue che l'antitrasformata di  $\frac{i}{z+i\gamma}$  è  $e^{-\gamma t}$ . Quindi

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} f(u) du$$

### 21.2.2. Ritorno a Kramers-Kronig.

Sulla scorta di quest'ultimo esercizio è molto utile ritornare a Kramers-Kronig. Lasciamo pure perdere il transiente  $v_0 e^{-\gamma t}$  e consideriamo la velocità a regime della particella. Abbiamo

$$\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{z+i\gamma}, \quad \widehat{v}(z) = \chi(z)\widehat{f}(z), \quad v(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} f(u) du$$

Riprendiamo i 3 punti della lezione 11.2.3:

- (1) La grandezza fisica  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  è la trasformata di Fourier della funzione che rappresenta come la velocità della particella risponde, nel corso del tempo alla forza applicata  $f$ .
- (2) Perché  $\chi(t-u)$ , per ragioni fisiche deve essere zero per  $t < u$ : la risposta del sistema al tempo deve essere successiva alla forza applicata al tempo  $u$ ; per  $t < u$  la risposta del sistema è zero, perché la forza non è stata ancora applicata. **Come abbiamo dimostrato nella lezione precedente, la trasformata di Fourier di una funzione  $f(t)$ , nulla per  $t < 0$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$ .** Quindi, poiché la sola ipotesi su cui si basano le relazioni di dispersione è che la funzione sia analitica nel semipiano superiore si ha che per  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  valgono le relazioni

di dispersione. **[Esercizio: quali sono le implicazioni di questo fatto per il caso in esame?]**

- (3) La parte immaginaria delle funzione di risposta  $\chi(z)$  descrive come il sistema dissipa energia. Le relazioni di di Kramers-Kronig implicano che la risposta dissipativa è sufficiente a determinare la sua risposta in fase reattiva. **[Esercizio: mostrarlo direttamente per il caso in esame.]**

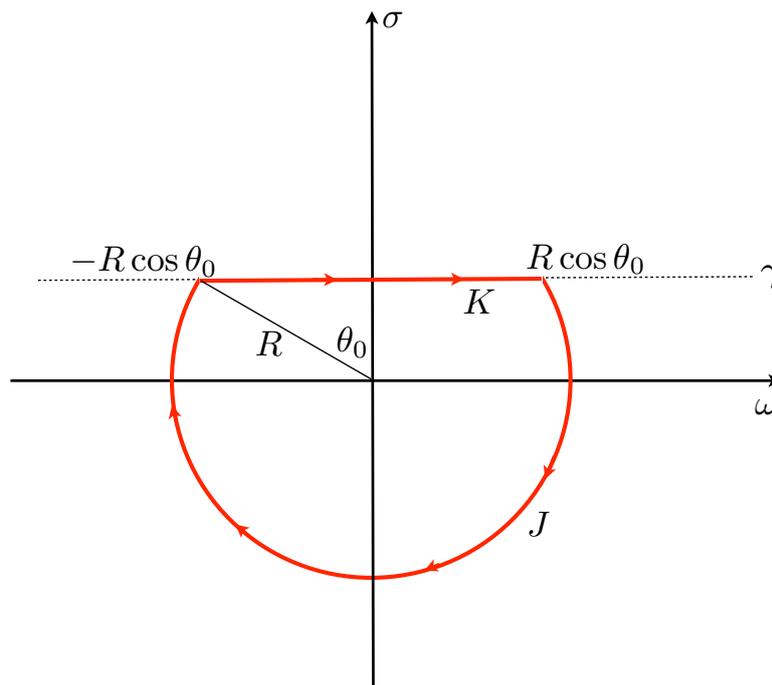
### 21.2.3. Ricetta per il cammino d'inversione.

Abbiamo visto che la formula di inversione è

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L \widehat{f}(z) e^{-izt} dz$$

dove  $L$  è qualunque linea nel semi-piano superiore  $\Pi^+$ , parallela all'asse reale, e tale che le singolarità di  $\widehat{f}(z)$  sono sotto  $\gamma$ .

La situazione è analoga a quella già incontrata nella lezione 8.1: il cammino va chiuso nel semipiano inferiore per avere convergenza dell'integrale. Una particolare deformazione del cammino, detta di Bromwich, è la seguente



Nella figura,  $\sigma = \gamma$  è una linea parallela all'asse reale scelta in modo tale che tutte le singolarità di  $\widehat{f}(z)$  siano sotto la linea (per il resto è arbitraria).

Allora l'integrale che si vuole calcolare è uguale, nel limite  $R \rightarrow \infty$ , all'integrale lungo la linea chiusa  $K + J$ , e questo integrale, a sua volta è uguale a  $-$ [somma dei

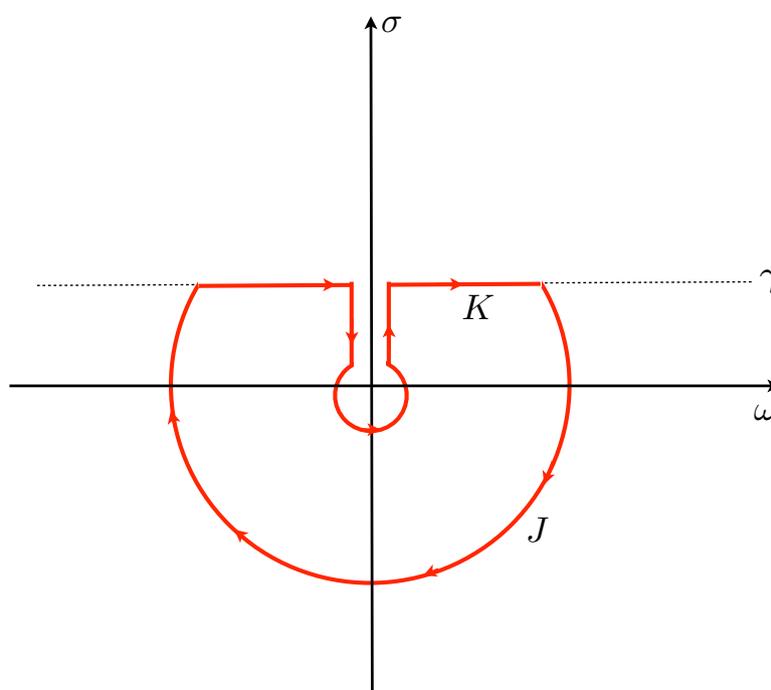
residui dentro la linea chiusa]. Segno “−” perchè il cammino è percorso in senso orario.

**N.B.** Questo metodo di calcolo può funzionare solo se è garantito che l’integrale lungo  $J$  non dà contributo nel limite  $R \rightarrow \infty$ . Devono essere cioè *essere soddisfatte le condizioni del lemma di Jordan* (vedere lezione 8.1). Una condizione sufficiente perché queste condizioni siano soddisfatte è che si abbia su  $J$

$$|\widehat{f}(z)| = \frac{M}{R^k}$$

dove  $M$  è una costante e  $k > 0$ .

Infine, se ci sono punti di diramazione, ad esempio per  $z = 0$ , occorrerà deformare il cammino per escludere il punto di diramazione, come mostrato in figura (nel caso in cui  $z = 0$  è un punto di diramazione)



#### 21.2.4. Definizione standard di trasformata di Laplace.

Di solito la trasformata di Laplace è definita nel piano delle frequenze complesse  $z = \omega + i\sigma$  ruotato di  $-\pi/2$ , cioè ponendo  $s = -iz$ . Si definisce

$$\tilde{f}(s) = \widehat{f}(is) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La trasformata  $\tilde{f}(s)$  è calcolata per  $s$  reale e poi estesa per prolungamento analitico al piano complesso  $s$ . Procedere in questo modo avrà anche i suoi vantaggi (forse), ma oscura il legame con la trasformata di Fourier, introducendo un’innaturale rotazione nel piano delle frequenze. Sia come sia, poiché questa è il modo

standard di procedere dei libri, continuiamo la nostra discussione della trasformata di Laplace sulla base della definizione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

per  $s$  reale e positivo. Ecco le proprietà più importanti di  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

**Linearità:**

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$$

**Prima proprietà della traslazione:** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s - a)$$

**Seconda proprietà della traslazione:** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  e  $g(t) = f(t - a)$  per  $t > a$  e  $g(t) = 0$  per  $t < a$  allora

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} \tilde{f}(s)$$

**Proprietà del cambio di scala:** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

**Trasformata di Laplace della derivata:** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

**Trasformata di Laplace degli integrali:** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

**Prodotto per  $t^n$ :** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s)$$

**Divisione per  $t$ :** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \tilde{f}(u) du$$

**Funzioni periodiche:** Se  $f(t)$  è una funzione periodica di periodo  $T$  allora

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

**Comportamento di  $f(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ :** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0$$

**Teorema del valore iniziale:** Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{f}(s)$$

**Teorema del valore finale:** Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{f}(s)$$

**Generalizzazione del teorema del valore iniziale:** Se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

si dice che per valori di  $t$  prossimi a zero ( $t$  piccolo),  $f(t)$  è prossima a  $g(t)$  e si scrive  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow 0$ . Analogamente, se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(s)}{\tilde{g}(s)} = 1$$

si dice che per valori elevati di  $s$ ,  $\tilde{f}(s)$  è prossima a  $\tilde{g}(s)$  e si scrive  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ . Allora vale il teorema:

★ Se  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow 0$ , allora  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ .

**Generalizzazione del teorema del valore finale:**

★ Se  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ , allora  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow 0$ .

Sia adesso  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  l'anti-trasformata di Laplace. Ecco le sue proprietà più importanti.

**Linearità:**

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

**Prima proprietà della traslazione:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s - a)\} = e^{at} f(t)$$

**Seconda proprietà della traslazione:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \tilde{f}(s)\} = \begin{cases} f(t - a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}$$

**Proprietà del cambio di scala:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

**Antitrasformata di Laplace di derivate:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

**Antirasformata di Laplace di integrali:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \tilde{f}(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

**Prodotto per  $t$ :** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\tilde{f}(s)\} = f'(t)$$

**Divisione per  $t$ :** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$$

**Proprietà della convoluzione:** Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = g \star f(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)du = f \star g(t)$$

#### 21.2.5. *Formula standard di inversione complessa di Bromwich.*

È quella che avevamo già trovato, fatto il cambiamento di variabili  $iz = -s$ , cioè

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(z)e^{st} dz$$

E questo è il contorno standard di Bromwich (mutatis mutandis, valgono le stesse considerazioni di prima)

