

22.1. Analisi asintotica: il metodo della fase stazionaria.

22.1.1. Notazioni standard dell'analisi asintotica.

I simboli \mathcal{O} , \mathfrak{o} e \sim sono definiti nel modo seguente. Supponiamo che $f(z)$ e $g(z)$ siano funzioni complesse definite in qualche regione $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ del piano complesso e che abbiano un limite quando $z \rightarrow z_0$ in \mathcal{R} . Allora si considera la seguente notazione abbreviata per descrivere le proprietà relative di queste funzioni nel limite $z \rightarrow z_0$.

Asintoticamente limitata:

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

se il rapporto $|f(z)/g(z)|$ è limitato quando $z \rightarrow z_0$. Diciamo allora che $f(z)$ è asintoticamente limitata da $g(z)$ quando $z \rightarrow z_0$.

Asintoticamente più piccola:

$$f(z) = \mathfrak{o}(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che $f(z)/g(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow z_0$. Vale a dire, $f(z)$ è asintoticamente più piccola di $g(z)$ quando $z \rightarrow z_0$.

Asintoticamente uguale:

$$f(z) \sim g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che (assumendo $g(z)$ non nulla in un intorno di z_0)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Equivalentemente, questo significa che per $z \rightarrow z_0$

$$f(z) = g(z) + \mathfrak{o}(g(z))$$

Esempi:

- $f(t) = \mathcal{O}(1)$ quando $t \rightarrow t_0$ significa che $f(t)$ è limitata quando $t \rightarrow t_0$ (si dice che f è $\mathcal{O}(1)$ quando è limitata ovunque).
- Se $f(t) = 5t^2 + t + 3$, allora, per $t \rightarrow \infty$, $f(t) = \mathfrak{o}(t^3)$, $f(t) = \mathcal{O}(t^2)$ e $f(t) \sim 5t^2$. Per $t \rightarrow 0$, $f(t) \sim 3$.
- Per $t \rightarrow \infty$, $t^{1000} = \mathfrak{o}(e^t)$.

Osservazioni:

- La funzione $g(z)$ nelle definizioni precedenti è usualmente detta *funzione di calibro*, in quanto è la funzione rispetto a cui si calibra il comportamento limite di $f(z)$
- Come notazione alternativa a $f(z) = \mathfrak{o}(g(z))$, spesso (specialmente in fisica) si usa

$$f(z) \ll g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

22.1.2. *Lemma di Riemann-Lebesgue.*

Vogliamo studiare il comportamento asintotico dell'*integrale di Fourier generalizzato*

$$(1) \quad F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx$$

nel limite $\lambda \rightarrow \infty$. Intuitivamente, ci aspettiamo che l'integrale sia pari a zero nel limite: se λ è grande, la funzione integranda oscilla molto rapidamente e ci aspettiamo che ci sia una cancellazione tra contributi positivi e negativi di intervalli adiacenti, e quindi ad un valore dell'integrale prossimo allo zero. In effetti, vale il seguente teorema:

LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE. *Se $f(x)$ è integrabile e $S(x)$ è continuamente differenziabile in $a \leq x \leq b$ e, inoltre, non è costante in nessun sotto-intervallo di $a \leq x \leq b$, allora, per $\lambda \rightarrow \infty$*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \rightarrow 0$$

22.1.3. *Metodo della fase stazionaria.*

Stabilito che $F(\lambda)$ tende a 0, si vuole determinare il suo ordine di infinitesimo per $\lambda \rightarrow \infty$. Nella seconda metà dell'800 Stokes e Kelvin, principalmente interessati ad applicazioni all'idrodinamica, svilupparono un metodo, noto come *metodo della fase stazionaria*, che è proprio mirato a raggiungere questo scopo.

Consideriamo prima il caso in cui $S'(x) \neq 0$. Moltiplichiamo e dividiamo per $S'(x)$ sotto il segno di integrale a secondo membro della (1), quindi integriamo per parti:

$$\int_a^b \underbrace{e^{i\lambda S(x)} S'(x)}_{\text{int}} \underbrace{\frac{f(x)}{S'(x)}}_{\text{der}} dx = e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx$$

Allora

$$F(\lambda) = \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} - \underbrace{\frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx}_{\text{termine integrale}}$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue, il termine integrale è $\mathfrak{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ e quindi, per $\lambda \rightarrow \infty$

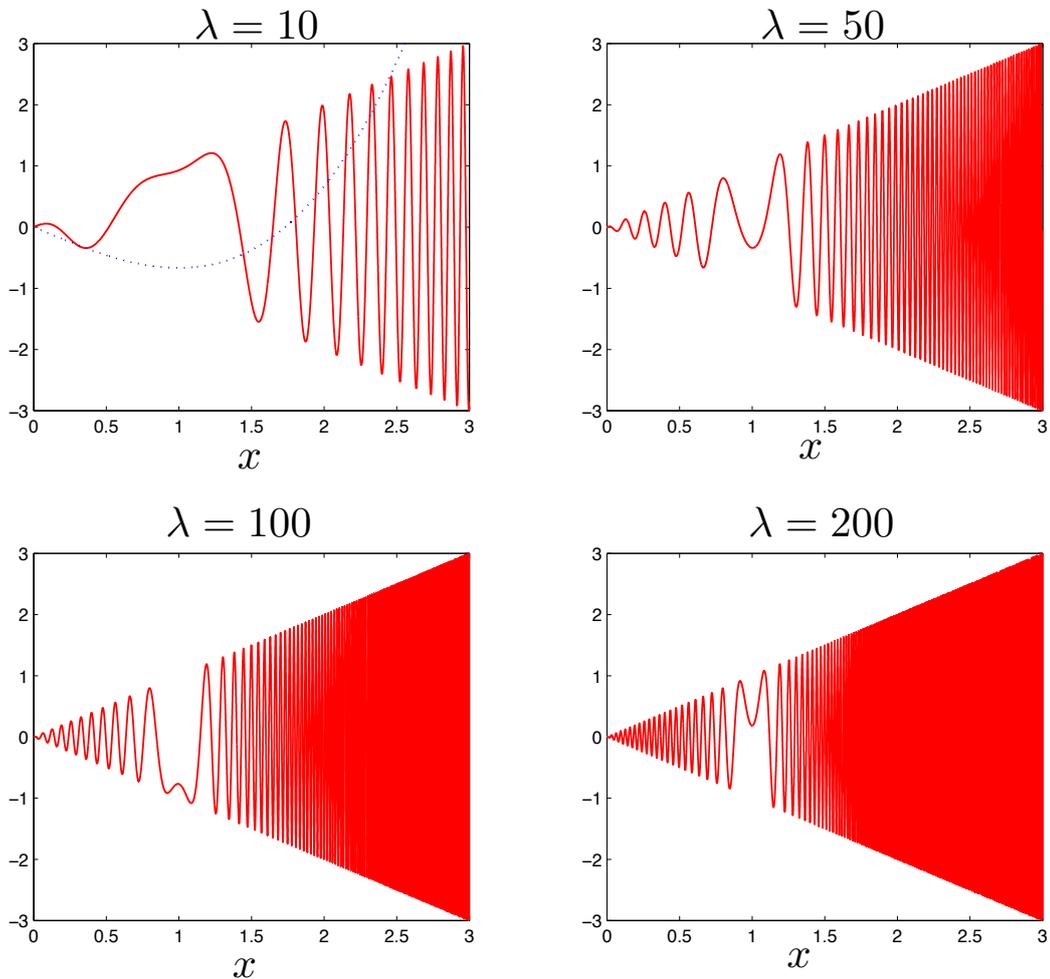
$$(2) \quad F(\lambda) \sim \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Tuttavia, se nell'intervallo $[a, b]$ la funzione $S(x)$ ha un *punto critico* o *stazionario*, cioè un punto c in cui si annulla la sua derivata, $S'(c) = 0$, dobbiamo cambiare strategia: non possiamo integrare per parti ed avere un S' a denominatore.

L'idea centrale del metodo della fase stazionaria è che in presenza di un punto critico c di S , il contributo dominante allo sviluppo asintotico di $F(\lambda)$ proviene proprio dall'intorno di $t = c$. Intuitivamente, l'idea del metodo è chiara: nell'intorno di un punto in cui la fase è stazionaria non c'è cancellazione, come si può verificare con un esempio. Consideriamo l'integrale

$$(3) \quad \int_0^3 x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx$$

e riportiamo in figura la funzione integranda per diversi valori di λ .



La figura dimostra perché è la regione intorno al punto stazionario della cubica $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, cioè intorno a $x = 1$, che contribuisce maggiormente all'integrale (3). In figura sono mostrati i grafici di $x \cos [\lambda (\frac{1}{3}x^3 - x)]$ per valori successivamente crescenti di λ (curve solide in rosso); la curva blu tratteggiata è la cubica $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ (che un minimo in $x = 1$). Vediamo che, fuori da un intorno del punto stazionario di $S(x)$, le aree tra l'asse delle x e la curva $x \cos [\lambda (\frac{1}{3}x^3 - x)]$ si cancellano approssimativamente, in completo accordo con il lemma di Riemann-Lebesgue.

Spieghiamo il metodo della fase stazionaria in 3 passi.

Primo passo. Sia c un punto stazionario di S (assumiamo per semplicità che ce ne sia uno solo) e sia $\epsilon > 0$ piccolo. Allora

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \left[\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^b \right] e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \\ &= \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Infatti, per i due integrali che non contengono il punto critico possiamo integrare per parti, applicare Riemann-Lebesgue e arrivare ad un'equazione simile alla (2). Poiché, come vedremo, il contributo nell'intorno di c è dominante, d'ora in poi trascureremo questa correzione di ordine $1/\lambda$ e scriveremo

$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Secondo passo. Se ϵ è abbastanza piccolo, per ottenere il comportamento dell'ordine dominante dell'integrale, le seguenti approssimazioni sono giustificate:

$$\begin{aligned} S(x) &\approx S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2 \\ f(x) &\approx f(c) \end{aligned}$$

Naturalmente, nello sviluppo di Taylor di $S(x)$ manca il termine del prim'ordine in quanto $S'(c) = 0$. Abbiamo inoltre assunto che $S''(c) \neq 0$: se così non fosse, dovremmo considerare termini di ordine superiore (e fermarci al primo termine non nullo). Sia come sia, otteniamo

$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{i\lambda(S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2)} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Terzo passo. Adesso estendiamo il dominio di integrazione da $-\infty$ a $+\infty$. Per quanto apparentemente bizzarro, questo è legittimo perché in questo modo introduciamo correzioni di ordine $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, che possono essere trascurate. Allora (portando anche fuori dall'integrale le costanti)

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\lambda}{2} S''(c)(x-c)^2} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Con il cambiamento di variabili (dovuto a Morse)

$$u = +\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(c)|(x-c)}$$

si ottiene

$$F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c)} \sqrt{\frac{2}{\lambda|S''(c)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \operatorname{sgn}[S''(c)]u^2} du,$$

dove

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

(vedi appendice). Quindi, l'asintotica di $F(\lambda)$ è

$$(4) \quad F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c) + i \operatorname{sgn}[S''(c)]\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Fine della descrizione del metodo della fase stazionaria. Adesso alcune osservazioni.

- (1) Se $c = a$ o $c = b$, il contributo all'integrale, che adesso è solo su un intervallo semi-infinito, è metà del risultato asintotico trovato. In questo caso occorre dunque moltiplicare per $\frac{1}{2}$ il risultato che abbiamo trovato.
- (2) Se $S(x)$ ha molti punti stazionari in $[a, b]$, allora spezziamo l'integrale in intervalli che contengono solo un punto stazionario, li trattiamo indipendentemente usando il metodo appena descritto e poi sommiamo tutti i contributi.
- (3) Se il punto stazionario è tale che tutte le derivate di S sono nulle fino alla derivata m -esima, che è non nulla, allora lo sviluppo in serie della fase sarà $S(x) \approx S(c) + \frac{1}{m!}S^{(m)}(c)(x-c)^m$.

Esempio 1. Calcoliamo il termine dominante dello sviluppo asintotico dell'integrale (3), che scriviamo nella forma

$$\operatorname{Re}\{F(\lambda)\}, \quad F(\lambda) = \int_0^3 x e^{i\lambda(\frac{1}{3}x^3 - x)} dx$$

Riconosciamo $f(x) = x$ e $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Si ha $S'(x) = x^2 - 1$, e solo una delle due radici, $x = 1$ è dentro l'intervallo di integrazione. Poiché $S''(x) = 2x > 0$ per $x \geq 0$, il punto $x = 1$ è un minimo locale e globale. Allora

$$f(1) = 1, \quad S(1) = -\frac{2}{3}, \quad S''(1) = 2$$

e dunque, applicando la (4),

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3}\right)}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Prendendone la parte reale, otteniamo l'asintotica cercata:

$$\int_0^3 x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3} \right), \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

22.1.4. *Asintotica a onde corte in meccanica quantistica in un caso semplice.*

Applichiamo il metodo della fase stazionaria per risolvere un esercizio di interesse fisico.

Esercizio 1. *Determinare l'andamento asintotico $\hbar \rightarrow 0$ della soluzione del seguente problema al contorno*

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(x, 0) = f_0(x) = r(x) e^{\frac{i}{\hbar} s(x)} \end{cases}$$

per $s(x) = mv_0x$, essendo v_0 una costante positiva, e per $r(x)$ funzione reale positiva.

Sol. Per quanto visto nella lezione 19, la soluzione di

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

è

$$f(x, t) = G \star f_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f_0(y) dy$$

dove

$$G(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t}$$

L'andamento asintotico di $f(x, t)$ è ottenuto ponendo $\lambda = 1/\hbar$ e studiandone l'asintotica per $\lambda \rightarrow \infty$. Dopo aver inserito G nel prodotto di convoluzione, tenuto conto della condizione iniziale, e posto $\lambda = 1/\hbar$, si ottiene

$$(5) \quad f(x, t) = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} F(\lambda)$$

dove

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy.$$

Possiamo riscrivere questo integrale come

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S(y)} r(y) dy$$

dove

$$S(y) = \frac{m(x-y)^2}{2t} + mv_0 y.$$

Determiniamo i punti stazionari di $S(y)$:

$$S'(y) = \frac{m(y-x)}{t} + mv_0 = 0 \implies y = x - v_0 t \stackrel{\text{def}}{=} c$$

Il valore della fase in c è

$$S(c) = \frac{m(v_0 t)^2}{2t} + mv_0(x - v_0 t) = mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t.$$

Per l'asintotica ci serve anche la derivata seconda di S calcolata in c . Si ha

$$S''(y) = \frac{m}{t} > 0$$

Applichiamo la (4),

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c) + i \text{sgn}[S''(c)] \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty.$$

Otteniamo

$$F(\lambda) \sim r(x - v_0 t) e^{i\lambda(mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t) + i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi t}{\lambda m}}$$

Sostituendo il valore di $F(\lambda)$ nella (5) e ripristinando $\hbar = 1/\lambda$ si ottiene l'asintotica cercata (osservando che le radici si cancellano a vicenda e che la radice di i a denominatore si cancella con $e^{i \frac{\pi}{4}}$). Si ha

$$f(x, t) \sim r(x - v_0 t) e^{\frac{i}{\hbar}(mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t)}$$

che descrive un pacchetto d'onde con numero d'onda

$$k = \frac{mv_0}{\hbar}$$

e frequenza

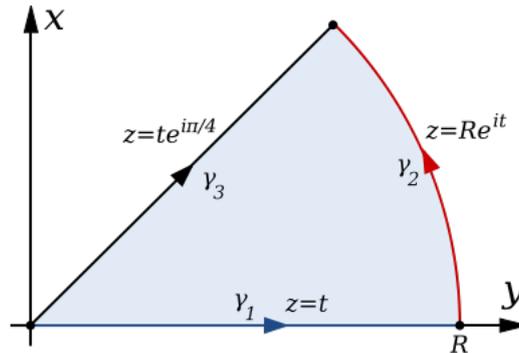
$$\omega = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

il cui profilo iniziale $r(x)$ si propaga nel corso del tempo lungo la traiettoria classica $x(t) = x + v_0 t$ senza cambiare di forma.

22.1.5. **Appendice: calcolo di** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. Incominciamo considerando l'integrale familiare

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$$

che sappiamo ha il valore $\sqrt{\pi}/2$ quando z è reale. Lo stesso integrale può essere pensato come un integrale nel piano complesso. Consideriamo il contorno nel piano complesso illustrato in figura



Posto $z = Re^{it}$, se $0 < t < \pi/4$, allora l'integrale di e^{-z^2} sull'arco di cerchio γ_2 in figura) tende a 0 quando $R \rightarrow \infty$. Infatti,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} it R dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 (\cos 2t + i \sin 2t)} it R dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2t} R dt \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{perché } \cos 2t > 0 \text{ per } 0 < t < \pi/4) \end{aligned}$$

Allora, essendo e^{-z^2} analitica nella regione interna al contorno, l'integrale sull'asse reale (γ_1 in figura) è uguale all'integrale lungo la retta di pendenza $\pi/4$ (γ_3 in figura), dove $z = ue^{i\pi/4}$ (u reale positivo), cioè

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{iu^2} du$$

Quindi

$$\int_0^{\infty} e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$

Analogamente, si trova

$$\int_0^{\infty} e^{-iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4}$$